Лекция 5_ Адиабаталық теория шеңберінде Постньютондық жуықтаудағы сынақ денелерінің қозғалысы

Постньютондық гравитация - Ньютон физикасына сәйкес келетін гравитациялық теңдеулердің оңайлатылған түрі болып табылады. Ол гравитацияны кеңістік-уақыттың қисаюына байланысты әсерлерді қоспағанда, массалардың бір-біріне тартылуы ретінде сипаттайды. Ядролық бөлшектердің кванттық механикасы мен физикасы контекстінде енгізілген адиабаталық теория жүйенің лагранждық немесе гамильтондық көрсеткіштерін бұзу және кейбір қосымша параметрлердің баяу өзгеруіне мүмкіндік беру идеясына негізделген. Адиабаталық теорияның әртүрлі аспектілері физиканың термодинамика, химия, классикалық және кванттық механика сияқты көптеген салаларында қолданылды.

Классикалық ЖСТ контекстінде сынақ денесінің қозғалысын зерттеудің тәсілін М. Абдилдин [1] белгілі бір статикалық кеңістік-уақыт метрикасы мен Фок [2] әзірлеген концептуалды теорияны пайдалану арқылы ұсынды. Фок метрикасы импульс моментінің көздің екінші ретке дейін айналуын және оның ішкі құрылымын Ньютоннан кейінгі ($\sim\frac{1}{c^2}$) жуықтауды қосу үшін жалпыланған, мұндағы c – вакуумдағы жарық жылдамдығы. Бұл кеңейтілген Фок метрикасы бастапқыда гармониялық координаттарда [3,4] ұсынылған, ол сынақ денлерінің траекторияларымен байланысты векторларды пайдалану арқылы сынақ бөлшектерінің қозғалысын зерттеуді жеңілдетеді. Абдилдин еңбектерінің маңызды нәтижелерінің бірі жалпы денелердің қозғалысын зерттеудің адиабаталық теориясын жүзеге асыру болды, ол бұрын алынған қозғалыс теңдеулерінің формасын күрт жеңілдетеді [2,4]. Бұл дәрісте біз адиабаталық теорияның негізгі идеялары мен физикалық аспектілерін ұсынып, оның жеткілікті жалпы есептердегі қолданылуы мен қарапайымдылығын көрсетеміз. Бұл артықшылықтарды нақты көрсету үшін біз нақты айналатын объектінің гравитациялық өрісіндегі сынақ денелерінің қозғалысын зерттейміз.

Бақылауларға сәйкес, барлық астрофизикалық массивтік және ықшам нысандар қандай да бір осьтің маңында айналады. Мұндай объектілердің гравитациялық өрісіндегі сынақ денесінің қозғалысын зерттеу олардың негізгі қасиеттерін түсінуге, күшті өріс режимінде релятивистік әсерлерді тексеруге және айналатын объектілердің айналасындағы кеңістік-уақыттың геометриялық құрылымын зерттеуге мүмкіндік береді. Вакуумдағы статикалық, сфералық симметриялы объект үшін Эйнштейн өріс теңдеулерінің шешімі Шварцшильд метрикасы ретінде кеңінен белгілі [5]. Бұл шешім классикалық Ньютондық гравитация теориясы аясында түсіндірілмейтін жаңа әсерлерді сипаттайды [6].

1918 жылы Лензе және Тирринг шамамен көздің бұрыштық моментпен бірінші ретке дейін айналуын ескеретін сыртқы шешімді алды [7, 8]. Орталық дененің мұндай айналуы статикалық және стационарлық кеңістік-уақыттың айырмашылығын анықтайды және сонымен қатар гравитациялық эффектілерге әкеледі. Мұндай құбылыстардың ең көрнектісі айналмалы дененің жанындағы координаттық торды тарту (frame dragging) эффектісі болып табылады, ол орталық объектінің айналу осі айналасында экваторлық емес жазықтықта спутниктердің орбиталары мен гироскоптарының прецессиясы ретінде байқалады [9].

Қозғалмайтын, осьтік симметриялы және асимптотикалық тегіс гравитациялық өріс үшін бірінші нақты вакуумдық шешім 1963 жылы Керр шығарды [10]. Бұл шешім жұлдыздық массалардың қара құрдымдардан бастап белсенді галактикалық ядролардағы аса массивті қара құрдымдарға дейін әртүрлі массалық таралулардың гравитациялық өрісін сипаттау үшін тиімді қолданылды [11].

Кейінірек, 1968 жылы Эрнст Эйнштейннің өріс теңдеулерін тікелей шешпей, күрделі потенциалды енгізу арқылы Папапетроу сызығының элементіне негізделген жаңа стационар, осьсимметриялық және асимптоталық жалпақ шешімдерді алу процедурасын жасады [12]. Бұл әдіс жаңа нақты шешімдерге әкелді, олардың ішінде Керр шешімі ең қарапайым жағдай болды [13]. Керр метрикасының физикалық ақылға қонымды ішкі шешімі жоқтығына қарамастан, ол астрономия мен астрофизикада қара құрдымдардың физикасын және олардың маңында болып жатқан процестерді зерттеу үшін кеңінен қолданыла бастады [14–21]. Бұл дәрісте біз Керрдің жуық шешіміне тоқталып, адиабаталық теория шеңберінде сынақ денелерінің қозғалысын баяндаймыз.

Сонымен, адиабаталық теория орбиталардың векторлық элементтерін, сызықты емес тербеліс теориясының асимптотикалық әдістерін және адиабаталық инварианттарды қолдануға негізделген. Ол өріс немесе қозғалыс теңдеулерін нақты шешпей, физикалық құбылыстарды талдаудың баламалы әдісі болып табылады. Адиабаталық теорияға сәйкес сынақ денелерінің қозғалысын лагранжиан арқылы сипаттауға болады, ол негізінен белгілі лагранжианның ұйытқыған түрі болып табылады. Мысалы, орталық өрісте қозғалатын релятивистік бөлшекке арналған Кеплер есебін қарастырайық. Сонда сәйкес ұйытқыған Лагранж функциясын былай жазамыз

$$L = -mc^2 + \frac{mv^2}{2} + \frac{Gmm_0}{r} + \frac{1}{c^2}F(\vec{r},\vec{v}) \tag{1}$$

мұндағы F – ұйытқу функциясы. Сәйкесінше, сәйкес Гамильтон функциясы былай жазылады

$$\mathrm{H} = \mathrm{mc}^2 + \frac{\mathrm{p}^2}{2\mathrm{m}} - \frac{\mathrm{Gmm}_0}{\mathrm{r}} - \frac{1}{c^2}F(\vec{r},\vec{p}), \tag{2}$$

Мұндағы $\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}$ – сынақ денесінің импульсі.

Сынақ денесінің қозғалысын орбитаның импульс моментінің векторы $\vec{M}$ және Лаплас векторы $\vec{A}$ арқылы сипаттауға болады, олар қозғалыстың интегралдары болып табылады

$$\vec{\mathrm{M}} = [\vec{r}, \vec{p}], \tag{3}$$

$$\vec{\mathrm{A}} = \left[\frac{\vec{\mathrm{p}}}{\mathrm{m}}, \ \vec{\mathrm{M}}\right] - \frac{Gm_0 m}{\mathrm{r}}\vec{r}, \tag{4}$$

Мұндағы $A = Gm_0 me$ – Лаплас векторының абсолюттік шамасы (мәні), $\vec{r}$ –сынақ денесінің радиус-векторы, G – гравитациялық тұрақты, m_0 – гравитациялық көздің (орталық объектінің) массасы, m – сынақ денесінің массасы, ал e – орбитаның эксцентриситеті.

$\vec{M}$ және $\vec{A}$ векторлары орбитаның берілген кеңістіктегі пішіні мен орнын сипаттайды. Атап айтқанда, $\vec{M}$ векторы орбита жазықтығына перпендикуляр, ал $\vec{A}$ векторы орбитаның перигелийіне қарай бағытталған. Осылайша, қозғалыс теңдеулерін жалпы түрде былай жазуға болады

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{dM}{dt}\vec{e}_M + \left[\vec{\Omega}, \vec{M}\right], \tag{5}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA}{dt}\vec{e}_A + \left[\vec{\Omega}, \vec{A}\right], \tag{6}$$

мұндағы $\vec{e}_M$ және $\vec{e}_A$ сәйкесінше $\vec{M}$ және $\vec{A}$ бойымен бағытталған бірлік векторлары, ал $\vec{\Omega}$ – эллипстің «жалпы» айналуының бұрыштық жылдамдығы.

Екі айналмалы дененің есебі Фоктың бірінші жуықтау метрикасының негізінде қарастырылды. Оның нәтижелері адиабаталық теорияның негізгі формулаларын денелердің біреуінің массасы екіншісінен әлдеқайда үлкен болған кездегі шекті жағдайда шығаруға мүмкіндік береді. Айналмалы орталық дене өрісіндегі айналмалы/айналмалы сынақ денесі үшін қозғалыс теңдеулерінің (5) және (6) айқын түрін келесідей жазуға болады

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = -\frac{MS_x\omega_y\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)}{2c^2 aPm^2(1+\sqrt{1-e^2})}\vec{M} + \left[\vec{\Omega}, \vec{M}\right], \tag{7}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{MS_y\omega_x\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)}{2c^2 a^2 m^2(1+\sqrt{1-e^2})}\vec{A} + \left[\vec{\Omega}, \vec{A}\right], \tag{8}$$

мұндағы $S_x = I\omega_x$ және $S_y = I\omega_y$ - сынақ денесінің тиісті бұрыштық моментінің x және y құраушылары, сәйкесінше ω_x және ω_y - бұрыштық жылдамдықтың сәйкес компоненттері, I - сынақ денесінің инерция моменті, a орбитаның үлкен жартылай осі, ал P - жарты фокустық қашықтық. Амалдар орындау арқылы мына өрнектерді аламыз

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{M^2 S_x \omega_y \left(1-\sqrt{1-e^2}\right)}{2c^2 aPm^2 (1+\sqrt{1-e^2})}, \tag{9}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{MAS_y \omega_x \left(1-\sqrt{1-e^2}\right)}{2c^2 a^2 m^2 (1+\sqrt{1-e^2})^2}, \tag{10}$$

Одан әрі қарай (9) және (10) формулаларының дифференциалынан

$$\frac{dM}{dA} = -\frac{e^2 M}{(1-e^2)A}, \tag{11}$$

содан

$$A = \alpha e, \alpha = Gm_0 m, \tag{12}$$

(11) былай жазылады

$$\frac{\mathrm{dM}}{\mathrm{M}} = -\frac{\mathrm{ede}}{(1-\mathrm{e}^2)}, \tag{13}$$

бұдан қозғалыстың интегралы:

$$\frac{M}{\sqrt{1-e^2}} = const, \tag{14}$$

Мына өрнек жүйенің адиабаталық инвариантын білдіреді, оны былай белгілейміз

$$M_0 = \frac{M}{\sqrt{1-\frac{A^2}{\alpha^2}}}, \tag{15}$$

Сонымен қатар, адиабаталық инвариант релятивистік емес энергиямен былай байланысқан

$$E = -\frac{Gmm_0}{2a} = -\frac{m\alpha^2}{2M_0^2}. \tag{16}$$

Инвариантты (15) қосу арқылы және (5) пен (6) теңдеулерді ықшам түрде қайта жазуға болады

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{dM}{dt}\vec{e}_M + \left[\vec{\Omega}, \vec{M}\right], \tag{17}$$

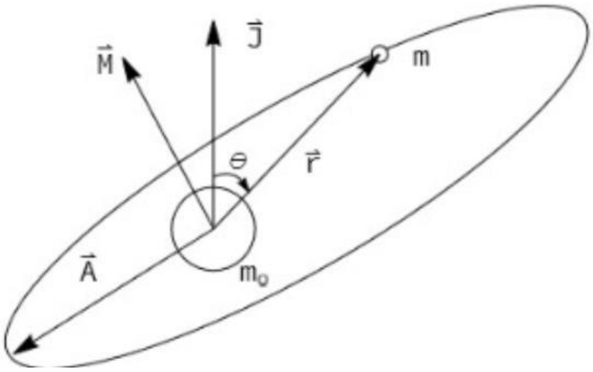
$$\frac{d\vec{e}_A}{dt} = \left[\vec{\Omega}, \vec{e}_A\right], \tag{18}$$

Бұларды $\vec{\Omega}$ бұрыштық жылдамдықты анықтау үшін пайдаланамыз. Екінші жағынан, жалпы орбитаның бұрыштық жылдамдығы $\vec{\Omega}$ – сызықты емес механиканың асимптотикалық әдістеріне жататын белгілі амал қозғалыс теңдеулерін орташалау арқылы табылады. Шындығында, Абдильдин жүйенің орташаланған Гамильтонианынан орбиталық $\vec{M}$ импульс моментіне қатысты алынған дербес туындысы бұрыштық жылдамдық екенін дәлелдеген болатын

$$\vec{\Omega} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \vec{M}}, \tag{19}$$

мұндағы H – сынақ денесінің Кеплер орбитасының периоды бойынша орташа алынған гамильтонианы. Гамильтонианның орташа мәні $\vec{M}$ орбиталық бұрыштық моменттің және жүйенің адиабаталық инварианты M_0-не тәуелді.

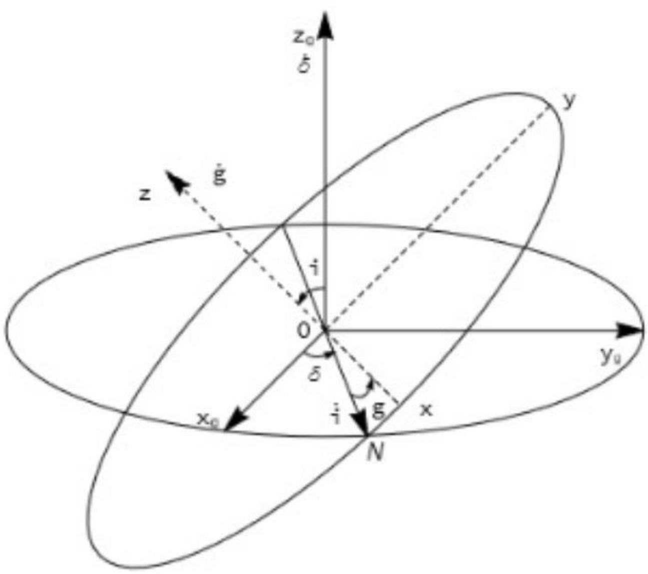
$\vec{\Omega}$ айқын түрі қарастырылатын физикалық жүйеге байланысты және теңдеулер (17)–(19) жиынымен анықталады, олар тіпті сынақ денесінің айналмайтын шекті жағдайында да жарамды.



1-сурет: Орталық дененің және оның векторлық элементтері бар сынақ денесінің схемалық суреті, мұндағы θ – орталық денененің бұрыштық моменті $\vec{J}$ мен $\vec{r}$ радиус векторы арасындағы полярлық бұрышы

Осылайша, адиабаталық теорияда теңдеулер (17), (18) және (19) өрнек денелердің қозғалысын зерттеудің математикалық негізі болып табылады. Басқаша айтқанда, бұл теңдеулер квазикеплер есебіндегі эволюция мәселесін толығымен шешеді.

1-суретте біз векторлық элементтер және $\vec{J}$ орталық объектінің меншікті бұрыштық импульсінің орындарын көрсетеміз. Әрі қарай техникалық мақсаттар үшін біз екі санақ жүйелерін, атап айтқанда қозғалмайтын x_0, y_0, z_0 және айналмалы x, y, z координаталар енгіземіз, екеуінің де ортақ координаттардың бас нүктесі бар. Осыған байланысты сынақ денесінің орбиталық бұрыштық моменті $\vec{M}$ – z осі бойымен, Лаплас векторы $\vec{A}$ – x осінің бойымен, ал радиус вектор $\vec{r}$ – xy жазықтығында, ал орталық дененің бұрыштық моменті $\vec{J} - z_0$ осі бойымен бағытталған. Қосымша мәліметтер алу үшін 2-суретті қараңыз.



2-сурет: Эйлер бұрыштары және олардың туындылары

Қолданылған әдебиет

1. Abdildin M.M. 1988 Mechanics of Einstein's gravitation theory. (Nauka (in Russian)).
2. Fock V.A. 1964. The theory of space, time and gravitation. (Pergamon Press - Macmillan Company).
3. Boshkayev K, Quevedo H. and Ruffini R. 2012 Phys. Rev. D 86 064043.
4. Abdildin M.M. 2006. The problem of motion of bodies in GR. (Qazaq Universiteti (in Russian)).
5. Schwarzschild K. 1916. Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften 189.
6. Misner C.W., Thorne K.S. and Wheeler J.A. 1973. Gravitation (San Francisco: W.H. Freeman Press).
7. Lense J. and Thirring H. 1918. Physikalische Zeitschrift 19- 156.
8. Landau L.D. and Lifshitz E.M. 1994. The classical theory of fields (Butterworth-Heinemann).
9. Ohanian H.C. and Ruffini R. 2013. Gravitation and Spacetime (3rd Edition, Cambridge University Press).
10. Kerr R.P. 1963. Phys. Rev. Lett. 11 237–238.
11. Shapiro S.L. and Teukolsky S.A. 1983. Black holes, white dwarfs and neutron stars. (Wiley-VCH).
12. Ernst F.J. 1968. Physical Review. 167. 1175–1177.
13. Stephani H., Kramer D., MacCallum M., Hoenselaers C. and Herlt E. 2009. Exact Solutions of Einstein's Field Equations (Cambridge University Press).

14. Stuchlík Z, Slaný P. and Török G. 2007. Astron. Astrophys. 470, 401–404 (Preprint 0704.1252).
15. Török G., Bakala P., Šrámková E., Stuchlík Z. and Urbanec M. 2010. Astrophys. J. 714 748–757. (Preprint 1008.0088).
16. Zhang F, Lu Y and Yu Q 2015 Astrophys. J. 809 127 (Preprint 1508.06293).
17. Boshkayev K., Idrissov A., Luongo O. and Malafarina D. 2020. Mon. Not. Roy. Astr. Soc. 496 1115–1123 (Preprint 2006.01269).
18. Bambhaniya P., Solanki D.N., Dey D., Joshi A.B., Joshi P.S. and Patel V. 2021. European Physical. Journal. C. 81-205. (Preprint 2007.12086).
19. Boshkayev K., Konysbayev T., Kurmanov E., Luongo O., Malafarina D. and Quevedo H. 2021. Phys. Rev. D 104 084009.
20. Shahzadi M., Kološ M., Stuchlík Z. and Habib Y. 2021. European Physical Journal. C. 81 1067 (Preprint2104.09640)
21. Török G., Kotrlová A., Matuszková M., Klimovičová K., Lančová D., Urbancová G. and Šrámková E. 2022. Astrophys. J. 929 28 (Preprint 2203.04787).